Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов. Максимальная оценка за всю работу – 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. Про вещественные числа a, b и c известно, что $abc + a + b + c = 10$ и $ab + bc + ac = 9$. Для каких чисел x можно утверждать, что хотя бы одно из чисел a, b, c равно x? (Найдите все такие числа x и докажите, что других нет.)

2. Вовочка хочет передать Наташе на уроке записку в подписанном конверте, при этом конверт в известном порядке сначала проходит через весь остальной класс. Каждый ученик, кроме Наташи, может недолюбливать одного одноклассника, и, если передает конверт, подписанный собой, меняет на этого кого-то, если подписанный этим кем-то — на себя, иначе просто передаёт дальше по цепочке. Сколько учеников в классе могут кого-то недолюбливать, если Вовочка может так заранее подписать записку, чтобы Наташе конверт дошел с любым именем, с каким он хочет? (Все имена в классе различны.)

3. Гриша нарисовал на плоскости выпуклый n-угольник и провел все его диагонали, и о чудо, ни в какой точке, кроме вершин n-угольника, не пересеклось больше двух отрезков. Сколькими способами Гриша может обвести маркером часть имеющихся на рисунке линий, чтобы получить треугольник (не обязательно состоящий из целых диагоналей и, быть может, содержащий внутри себя не обведенные линии)?

4. В кубическом сундуке со стороной 2^n дм хранится 8^n различных пряностей: в него упакованы восемь закрытых кубических коробок со стороной 2^{n-1} дм, в каждую из них — восемь закрытых кубических коробок со стороной 2^{n-2} дм, и так далее вплоть до коробок со стороной 1 дм, в каждой из которых лежит своя пряность.

В одной из маленьких коробок оказалась мышь, которая хочет отведать всех пряностей, посетив каждую коробку ровно по одному разу и вернувшись в конце пути в родную коробку. Прогрызая стенки, мышь может попадать из данной маленькой коробки в любую граничащую с ней по грани (но не может в граничащие лишь по ребру или вершине). Какое минимальное число отверстий в стенках коробок (всех размеров) ей предстоит прогрызть для осуществления своей мечты?

Опишите какой-нибудь путь мыши с минимальным числом отверстий в стенках и вычислите, у скольких маленьких коробок при этом окажутся прогрызены две противоположные стенки.

Замечание: для разных путей, дающих верный ответ в этой задаче, может получиться разное число коробок с прогрызенными противоположными стенками. Участникам, у которых число таких коробок окажется наибольшим, будут вручены памятные призы. (Это достижение не влияет на оценку работы и присвоение званий победителя и призера олимпиады.)

5. Рассмотрим всевозможные приведенные квадратные трехчлены $x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами p и q. Назовем областью значений такого трехчлена множество его значений во всех целых точках $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Какое наибольшее количество таких трехчленов можно выбрать, чтобы их области значений попарно не пересекались?

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF, H — ортоцентр. Окружность с центром в точке O проходит через точки A и H, пересекая стороны AB и AC в точках Q и P соответственно (точка O не лежит на сторонах AB и AC). Описанная окружность треугольника QOP касается стороны BC в точке R. Докажите, что $\frac{CR}{BR} = \frac{ED}{FD}$.